

Vozsech István*

A Föld forgásának hatása a lövedékmozgásra

BEVEZETÉS

Lőfegyverekből leadott lövések tanulmányozása során – különösen, ha a kilőtt lövedék több mint egy másodpercet tölt a röppályáján – szabályszerű eltéréseket figyelhetünk meg annak függvényében, hogy mely égtáj irányába és melyik szélességi körön tartózkodva adjuk le lövéseinket. Nyilvánvalóan a lövedék röppályáját számos tényező befolyásolja, de ezek majd mindegyike csak valószínűségelméleti módszerekkel számítható, hatásai az egyedi röppályákat befolyásolják. A lövedék pályáját befolyásoló hatások közül szabatosan csak a lövedék állásszögéből származó Magnus-hatás és a szintén az állásszög miatti emelő reakcióerő, valamint a Föld forgásából adódó hatások számíthatók, de míg az első kettő effektus csak légkörben repülő – és a Magnus-hatás esetében forgó – lövedékeknél lép fel, úgy a Coriolis-erő és a szállítóerő minden mozgó testre hatással van, függetlenül annak forgásától, vagy a légkör jelenlététől. (A Coriolis és a szállítóerő – két speciális eset kivételével – valóban minden, a Földhöz kötött koordináta-rendszerben lévő testre hat. A két eset az északi és a déli sarkpontokon (forgási tengelypontokban) leadott függőleges lövések elméleti lehetősége, de ez nyilvánvalóan nem életszerű.) Vizsgálódásunkat a Föld forgásából származó hatásokra összpontosítva, tekintsük át, hogy milyen változások következnek be a lövedék röppályájában, mi ennek az oka és hogyan tudjuk mindezt kiszámítani.

A tanulmányban szereplő mennyiségek – ahol ez külön nincs jelölve – mértékegységét SI alapegységekben, vagy azokból származtatott mértékegységekben kell értelmezni. Számításainkat úgy az északi, mint a déli féltekére elvégezzük, de az egyenlítőn Dél felé haladva koordináta-rendszerünk eredeti északi irányitottságát nem változtatjuk meg, a grafikonok képei így folytonosságot mutatnak.

A tanulmányban úgy az északi, mint a déli pólust a Föld szögsebességvektora tűzi ki, a mágneses pólusoknak itt nincs szerepe.

Célunk olyan viszonylagosan egyszerű, koncentrált paraméterű modellt alkotni, amely a kellő pontosságú röppályagörbék meghatározása érdekében gázdinamikai, dinamikai, hőtani differenciálegyenlet-rendszerek felhasználásával közelíti a valós folyamatokat.

ÖSSZEFOGLALÁS: A tanulmány a Föld forgásának lövedékekre gyakorolt hatásaival foglalkozik. A Föld-erőterre összpontosítva a szerző vizsgálja, hogy milyen változások következnek be a lövedék röppályájában, mi ennek az oka, és hogyan lehet mindezt kiszámítani. A hatás bemutatásához a PzH 2000 típusú önjáró löveggel leadott nagy távolságú, erősen ívelt röppályákat eredményező lövések, valamint lövészfegyverek lapos röppályáinak eltéréseit mutatja be, a földrajzi szélesség és a tájolás függvényében.

KULCSSZAVAK: Ballisztika, külső ballisztika, Coriolis-effektus, Eötvös-effektus, Föld forgása, röppályagörbe, lövedék röppályája

A Föld forgásának lövedékekre gyakorolt hatását valamennyi külső ballisztikával foglalkozó szakkönyv megemlíti, de részletes tárgyalásával már kevesebb tudományos munka foglalkozik. Kiemeljük Günter Hauck alapművét [1], valamint Carlucci könyvét [2]. Mindkettő az erőhatás definíciójából kiindulva vezeti le a külső ballisztika egyenlet-rendszerébe beírandó additív egyenleteket. A vonatkoztatási rendszerek transzformációinak mélyebb, elméleti megismerésére pedig különösen alkalmas Györgyi Géza [3] elektronikus összeállítása, valamint Béda Gyula főként gépészeti vonatkozású jegyzete [4].

Átvéve [1] és [4] gondolatmenetét, a továbbiakban a Coriolis és a pályaponti gyorsulás definíciójából kiindulva állítjuk elő az additív tagokkal kiegészített külső ballisztikai egyenlet-rendszert. A matematikai egyenletek megoldásához a MAPLE szimbolikus matematikai editort használtuk fel.

PROBLÉMAFELVETÉS

A külső ballisztikai számítások elvégzése során – amennyiben a lövedék levegőben tartózkodása 1 másodperctől nem több – általában a földi erőteret konzervatív erőtérrnek tekintjük. Ekkor érvényes Newton II. axiómája, azaz

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \quad (1.)$$

Ez definíciószerűen: Valamely erőter akkor konzervatív, ha

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{rot}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (2.)$$

vagyis az erőter örvénymentes, ahol ∇ a derivált vektoroperátor, \mathbf{v} a vektormező, $\mathbf{rot}(\mathbf{v})$ pedig a vektortér rotációja.

Ez az összefüggés teljes mértékben igaz a centrális erőterekre, azaz érvényes a földi gravitációs erőterre is, de csakis arra! A Föld amellett, hogy gravitációs erőteret hoz létre maga körül, forgása következtében a földi megfigyelő szempontjából egy centrifugális erőteret is generál.

Az erőter-örvényességet az 1. ábra szemlélteti. A légkör sebességeloszlása a magasság függvényében a Föld forgása okán lineáris, az egyes rétegek a magasságukkal meghatározott kerületi sebességgel forognak, azaz a Földhöz rögzített rendszerben a légkör nyugalomban van, nem mozog.

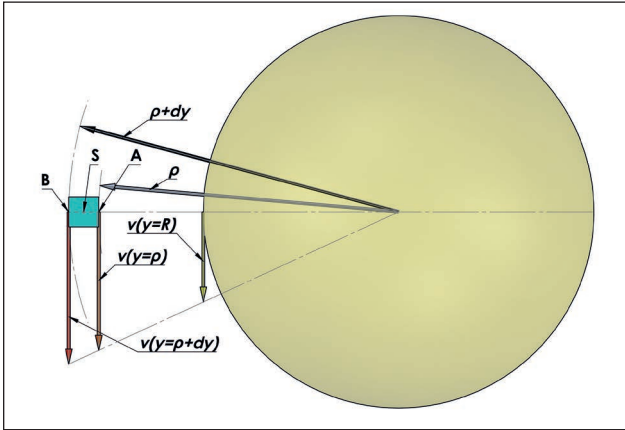
Jelöljük ki a légkörből egy elemi dy élméretű kockát – az egyszerűség kedvéért az Egyenlítő mentén – és vizsgáljuk

ABSTRACT: The study deals with the effects of the Earth's rotation on projectiles. Focusing on the Earth's force field, the author investigates what changes occur in the projectile trajectory, what causes them and how they can be calculated. To illustrate the effect, the variations in the flat trajectories of long-range shots fired from a PzH 2000 self-propelled gun, which produce highly curved trajectories, are shown as a function of latitude and orientation.

KEY WORDS: Ballistics, external ballistics, Coriolis effect, Eötvös effect, Earth's rotation, trajectory, projectile trajectory

* Mérnök. ORCID: 0000-0001-9818-7755





1. ábra. A Troposzféra egyenlítői szeletében egy elemi térfogat kerületi sebességei, az északi pólus felől szemlélve (Az ábra a szerző saját szerkesztése)

meg most csak magassági irányban a sebességeket. Az elemi kocka A pontja $v_A(y) = |\omega_{Föld} \cdot \rho|$, B pontja pedig $v_B(y) = |\omega_{Föld} \cdot (\rho + dy)|$ kerületi sebességgel mozog, azaz az elemi kocka S tömegközéppontja körül el fog fordulni. Ezzel beláttuk, hogy a sebességtér örvényes, azaz a földi erőter nem konzervatív, a forgó Földhöz rögzített koordináta-rendszerben.

Amennyiben azonban a mozgásokat álló koordináta-rendszerben írjuk le, úgy a konzervativizmusra tett (1.) kikötésünk igaz. Felvetődhet, miért nem abban a rendszerben dolgozunk? A választ egyszerűen megadhatjuk, a mozgásokat a forgó rendszerből látjuk, érzékeljük, azokat a szemléletesség érdekében ott célszerű leírni, vizsgálni.

Legelőször írjuk fel az azonos origóval rendelkező, forgó koordináta-rendszerek vonatkozásában a hely, a sebesség a gyorsulás és a szöggyorsulás átszámításához szükséges összefüggéseket. Kikötésünk, hogy az 1-es rendszer áll, tehát inerciarendszer, a 2-es rendszer pedig nem. (Az 1-es rendszert ⁽¹⁾, a 2-es rendszert ⁽²⁾ indexeléssel látjuk el.) A két koordináta-rendszer közös origóját rögzítsük a Föld középpontjában, és a másodikat kössük össze a forgó Földdel, vagyis legyen azzal együtt forgó.

A forgó rendszerben a mozgást leíró viszonylagos (relatív) erő, az inerciarendszerben felírt aktív erők összegének járulékos erővel történő kiegészítésével állítható elő [4]

$$\mathbf{F}^{(2)}_{rel} = \mathbf{F}^{(1)}_{akt} + \mathbf{F}^{(2)}_{száll} + \mathbf{F}^{(2)}_{Cor} \quad (3.)$$

A (1.) összefüggés értelmében áttérünk a gyorsulásokra, ezért

$$\mathbf{a}^{(2)}_{rel} = \mathbf{a}^{(1)}_{akt} + \mathbf{a}^{(2)}_{száll} + \mathbf{a}^{(2)}_{Cor} \quad (4.)$$

ahol:

$\mathbf{a}^{(2)}_{rel}$ a 2-es rendszerben észlelt látszólagos – relatív – eredő gyorsulás, amely a test látszólagos pályagörbéjét és látszólagos sebességét adja úgy, mintha a mozgás inerciarendszerben történt volna.

$\mathbf{a}^{(1)}_{akt}$ az inerciarendszerben észlelt és ébredő aktív erők keltette gyorsulás.

$\mathbf{a}^{(2)}_{száll}$ a 2-es rendszer első járulékos fiktív gyorsulása, a pályapont szállító gyorsulása

$\mathbf{a}^{(2)}_{Cor}$ a 2-es rendszer második járulékos fiktív gyorsulása, a Coriolis-gyorsulás. (Ezt a járulékos komponenszt Gaspard-Gustave de Coriolis¹ francia matematikus tiszteletére nevezzük Coriolis-gyorsulásnak.)

Elsődleges célunk tehát a mozgás leírása a kettes rendszerben, azaz $\mathbf{a}^{(2)}_{rel}$ meghatározása. Ehhez a (4.) valamennyi összetevőjét meg kell tudnunk határozni.

Megvizsgálva a röppályán mozgó lövedékre ható aktív erőket, pontosan kettő erőt észlelünk. (A hidrosztatikus és

az állásszögből adódó felhajtóerőtől, valamint a Magnus-hatásból adódó erőktől most, és az elkövetkezőkben is eltekintünk.) Az első a Föld gravitációs erőteréből adódó nehézségi erő, a második a légellenállásból származó lég-erő, és az azokból adódó gyorsulások.

A pályapont 2-es rendszerbeli szállító gyorsulása három komponensből áll össze, a pályapont translációs gyorsulásából, a szöggyorsulásból származó Euler-gyorsulásból és a centrifugális gyorsulásból. Mivel a két rendszer origója mindig azonos, így a translációs gyorsulás értelemszerűen zérus. A Föld szöggyorsulása, bár értéke nem nulla – a Föld keringési ideje évente 15-25 $\left[\frac{\mu\text{S}}{\text{ÉV}}\right]$ értékkel csökken [3] –, de elhanyagolhatóan kicsiny, ezért zérusnak tekintjük. A 2-es rendszer centrifugális gyorsulása pedig csak a pályapont origótól értelmezett helyzetének, és a 2-es rendszer szögsebességvektorának függvénye.

$$\mathbf{a}^{(2)}_{száll} = \mathbf{a}^{(2-1)}_{tran} + \mathbf{a}^{(2)}_{Eul} + \mathbf{a}^{(1)}_{cf} \quad (5.)$$

$$\mathbf{a}^{(2)}_{száll} = \mathbf{a}^{(2-1)}_{tran} + \beta \times \mathbf{r}^{(2)} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}^{(2)}) \quad (6.)$$

A Föld vonatkozásában a szállítógyorsulásra írhatjuk, hogy

$$\mathbf{a}^{(2)}_{F_{száll}} = -\omega \times (\omega \times \mathbf{r}^{(2)}) = \omega^2 \cdot \mathbf{r}^{(2)}_{\perp} \quad (7.)$$

ahol:

$\mathbf{a}^{(2-1)}_{tran}$ a 2-es rendszer translációs gyorsulása az 1-eshez képest

β a 2-es rendszer szöggyorsulás vektora

$\mathbf{r}^{(2)}_{\perp}$ a 2-es rendszer helyvektorának ω vektorra értelmezett merőleges vetülete

A (7) definíciós egyenletet szemügyre véve kijelenthető, hogy a centrifugális-gyorsulásnak nincs köze a mozgó testhez. Vektora mindig merőleges a szögsebességvektorra, valamint nagysága csak a szögsebesség értékétől, és a pályapont forgástengelytől mért távolságától függ.

Az első járulékos fiktív gyorsulás után térjünk ki a második járulékos gyorsulás komponensre, a Coriolis-erőre és gyorsulásra

$$\mathbf{F}^{(2)}_{Cor} = 2m \cdot \mathbf{v}^{(2)} \times \omega \quad (8.)$$

$$\mathbf{a}^{(2)}_{Cor} = 2 \cdot \mathbf{v}^{(2)} \times \omega \quad (9.)$$

A (9) definíciós egyenletből látszik, hogy a Coriolis-gyorsulásnak sem a légkörhöz, sem a mozgó test saját tengelye körüli forgásához (perdület vektorához), sem a mozgó test tömegéhez, tehetetlenségéig nyomatékához nincs köze, az csakis és kizárólag a koordináta-rendszer szögsebességvektorának és a mozgó test sebességvektorának a függvénye.

A komponensek ismeretében kirészletezhető a látszólagos mozgást előidéző relatív gyorsulás (4.) egyenlete

$$\mathbf{a}^{(2)}_{rel} = \mathbf{g} + \mathbf{E} - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}^{(2)}) + 2 \cdot \mathbf{v}^{(2)} \times \omega \quad (10.)$$

A (10.) egyenletet megvizsgálva láthatjuk, hogy abban két aktív gyorsulás, valamint két járulékos fiktív gyorsulás található. Utóbbiak csak két különleges esetben nem hatnak az észlelt mozgásra. Földi szemlélőként csak az északi és a déli pólusponton függőlegesen mozgó tárgyak mozgását fogjuk pontosan úgy látni, mint a külső objektív szemlélő, azaz a testek valós mozgását, ha úgy tetszik a valóságot szinte mindig torzítvá látjuk. (2. ábra)

A járulékos hatások definícióiból egyben az is következik, hogy nem végezhetnek a testen munkát, hiszen csak arra szolgálnak, hogy a nem inerciarendszerben a mozgások leírhatóak legyenek az inerciarendszerekben igaz összefüggésekkel.

A röppályák leírásához tehát meg kell határozni az aktív gyorsulásokat az inerciarendszerben, valamint a járulékos gyorsulásokat a forgó rendszerben.

A feladat megoldásához az alábbi hat lépést kell elvégeznünk:



2. ábra. A Sarkcsillagról és környezetéről készült hosszú zárídejű fényképfelvétel, a csillagok látszólagosan körvek mentén mozognak [9]

1. Meg kell határozni az alkalmazott Föld-modelleket úgy a nehézségi gyorsulás, mint a ballisztikai koordináta-rendszer meghatározása szempontjából. A két modell nem szükségszerűen azonos, mert azok – bár csak megkötésekkel –, de egymástól függetleníthetők. (A két modell akkor térhet el egymástól, ha nem kívánunk nagy pontosságú számításokat végezni, vagy lőtávolságunkon a Föld görbületéből adódó hatásokkal nem számolunk.) Az alkalmazott modellek szerint meg kell határozni a nehézséggyorsulás-függvényt, valamint a ballisztikai modell érvényességi tartományát.
2. Fel kell bontani a Föld szögsebességvektorát a választott koordinátarendszerrel meghatározott irányokban.
3. Meg kell határozni a légkörre alkalmazott egyensúlyi függvényt, azaz a légkörmodellt.
4. A kilőtt lövedék alakjának figyelembevételével meg kell határozni a légellenállásra vonatkozó függvényt.
5. Fel kell írni a (gáz)dinamikai és energetikai egyenleteket az inercia rendszerben kiszámított aktív erővel a forgó rendszerben.
6. Fel kell írni a járulékos egyenleteket a forgó rendszerben.

Amennyiben a modellek egyenletei rendelkezésre állnak, úgy a modellparaméterek helyes megválasztása után meg kell oldani azokat, valamely jól algoritmizálható numerikus módszer felhasználásával.

A FÖLDMODELLEK MEGHATÁROZÁSA

A földfelszíni gravitációs erőter meghatározásánál figyelembe vesszük a Föld lapultságát. A Föld geometriáját a Kraszovszkij² ellipszoidokkal közelítjük, amelyből a nehézségi gyorsulásra a

$$g(\lambda) = 9,78049 \cdot (1 + 0,0052884 \cdot \sin(\lambda)^2 - 0,0000059 \cdot \sin(2\lambda)^2) \quad (11.)$$

közelítő skaláregyenlet adódik, ahol λ a szélességi szögérték az Egyenlítőtől mérve, amelynek értéke Észak felé haladva növekszik. A képletből látható, hogy a gravitációs gyorsulás értéke az Egyenlítő mentén a legkisebb, a sarkoknál pedig maximális, hiszen a sarkpontoknál vagyunk a legközelebb a Föld középpontjához.

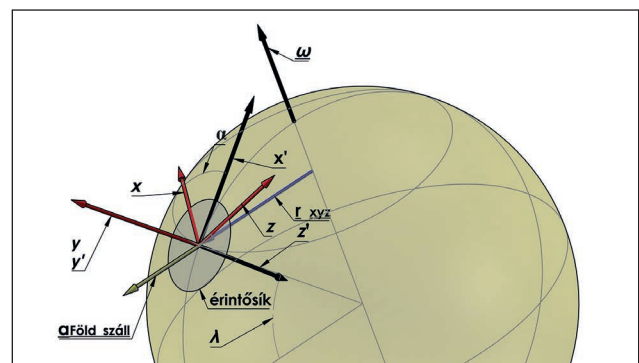
Ballisztikai számításainkhoz nem feltétlenül szükséges a Kraszovszkij-ellipszoidokkal közelítenünk a Föld alakját, de ehhez tisztázni kell, hogy milyen lőtávolságú röppályákat szeretnénk modellezni. Számításaink során a 155 mm űrméretű PzH 2000 önjáró löveg DM 92 lövedékét vesszük irányadónak, amelynek maximális lőtávolsága mintegy 30 km, valamint a tűzérési eszköz legnagyobb lövegemelkedési szöge 65° . A hozzávetőlegesen 30 km-es lőtávolság esetén megengedhető az a közelítés, miszerint a gravitációs számításainknál használt Kraszovszkij-ellipszoidot a tüzelőállás 30 km-es környezetében linearizáljuk, azaz a tüzelőállásban felfekvő érintősíkkal közelítjük.

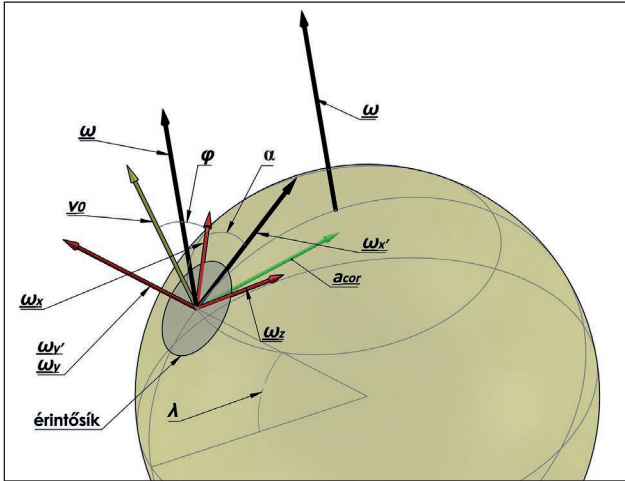
Ezzel két egyszerűsítést is végrehajtunk, egyrészt a centrális erőteret párhozamos erőterrel közelítjük, – ezt megtehetjük, ugyanis a paralel erőter szintén konzervatív –, ahol a nehézségi gyorsulásvektor már a tér minden pontjában paralel, valamint a nehézségi gyorsulásvektor skalár értékét az adott földrajzi szélességnél számítjuk ki, de ezt az értéket a röppályánk mentén a paralel térben konstansnak tekintjük.

Az érintő síkon az origótól 30 kilométerre elhelyezkedő pontok y irányú eltérése így hozzávetőlegesen 71 méter, a görbült felületen elhelyezkedő pontokhoz képest, ami 2,4%-os relatív hibát jelent. Ezzel a közelítéssel a ballisztikai számításainknál Descartes-féle koordináta-rendszerben dolgozhatunk, így egyenleteink áttekinthetőbbek lesznek. (Ez a közelítés nagyobb lőtávolságú eszközök, pl. könnyűgázos ágyúk, elektromágneses lövegek, valamint nagy pontosságú számítások esetében nyilván nem megengedhető, de célunk itt csak a jelenség bemutatása, ahhoz pedig az átláthatóság a legfontosabb szempont.)

Mivel itt kifejezetten csak a Föld forgását kívánjuk részletesen megvizsgálni – a Magnus és az emelőhatások okozta jelenségekkel nem foglalkozunk –, az alkalmazott ballisztikai modellünkben a lövedék forgásától eltekintünk, valamint a légerők meghatározásának kivételével a lövedék

3. ábra. A koordináta-rendszerek és a szállító gyorsulás értelmezése (Az ábra a szerző saját szerkesztése)





4. ábra. Adott földrajzi pontban lévő lövedékre értelmezett vektorok és szögek (Az ábra a szerző saját szerkesztése)

ket pontszerű testként vesszük figyelembe. Ezekkel a megkötésekkel a ballisztikai modellünk 3 szabadságfokú lesz, azaz a lövedékünk mozgását egy xyz ortogonális koordináta-rendszerben csak a lövedék súlypontját szemlélve teljes mértékben le tudjuk írni.

A ballisztikai koordináta-rendszerünk tehát a tüzelőállásban lévő descarteszi koordináta-rendszer, amelynek az origója a csőtengely és a csőszájsík dőféspontjában van, y tengelye a \mathbf{g} vektorral azonos irányú, de ellentétes értelmű, valamint az x tengely a cél felé mutat, a koordináta-rendszer pedig jobbsodrású. Az ω vektorok az érintősíkra vetítése legyen $\omega_{x'}$, amely egyben kijelöli x' -t. Koordináta-rendszerünk tájolását az $\omega_{x'}$, és az α -val elforgatott x' , azaz x adja. (3., 4. ábra)

A FÖLD SZÖGSEBESSÉGVektorÁNÁK, ÉS A LÖVEDÉKSEBESSÉGVektor FELBONTÁSA

Az ω vektort első lépésben írjuk fel az $x'y'z'$ rendszerben, ekkor

$$\omega_{x'} = |\omega| \cdot \cos(\lambda) \quad (12.)$$

$$\omega_{y'} = |\omega| \cdot \sin(\lambda) \quad (13.)$$

$$\omega_{z'} = 0 \quad (14.)$$

Az $x'y'z'$ rendszert forgassuk xyz -be y' körül α -val, ekkor

$$\omega_x = \omega_{x'} \cdot \cos(\alpha) = |\omega| \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\alpha) \quad (15.)$$

$$\omega_y = \omega_{y'} = |\omega| \cdot \sin(\lambda) \quad (16.)$$

$$\omega_z = \omega_{x'} \cdot \sin(\alpha) = |\omega| \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\alpha) \quad (17.)$$

Az xyz rendszerben tehát a Föld szögsebesség-vektora:

$$\omega_{xyz}(\lambda) = |\omega| \cdot \begin{bmatrix} \cos(\lambda) \cdot \sin(\alpha) \cdot \mathbf{i} \\ \sin(\lambda) \cdot \mathbf{j} \\ \cos(\lambda) \cdot \sin(\alpha) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (18.)$$

A lövedéksebesség-vektorra igaz, hogy:

$$\mathbf{v}_{xyz}(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \cdot \mathbf{i} \\ v_y(t) \cdot \mathbf{j} \\ v_z(t) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (19.)$$

A lövedékmozgás kezdetén (a kilövés pillanatában) pedig

$$\mathbf{v}_{xyz}(t=0) = \begin{bmatrix} v_0 \cdot \cos(\varphi) \cdot \mathbf{i} \\ v_0 \cdot \sin(\varphi) \cdot \mathbf{j} \\ 0 \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (20.)$$

AZ ELSŐ JÁRULÉKOS GYORSULÁS MEGHATÁROZÁSA

Írjuk fel az első járulékos gyorsulási összetevőt, a pályapont szállítógyorsulását, amely jelen vizsgálatunkban meg egyezik a pályapont centrifugális gyorsulásával, a (7.) egyenlet szerint.

Felírva a Kraszovszkij-ellipszoid paraméteres meridián egyenletét a Föld origójában rögzített koordináta-rendszerben kapjuk, hogy

$$\rho_0(\lambda) = \begin{bmatrix} \rho_{0,1}(\lambda) \cdot \mathbf{i} \\ \rho_{0,2}(\lambda) \cdot \mathbf{j} \\ \rho_{0,3}(\lambda) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p \cdot \sin(\lambda) \cdot \mathbf{i} \\ R_{eq} \cdot \cos(\lambda) \cdot \mathbf{j} \\ 0 \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (21.)$$

ahol:

R_p a Kraszovszkij-ellipszoid legkisebb – pólusokon mért – sugara, értéke 6 356 911 méter

R_{eq} a Kraszovszkij-ellipszoid legnagyobb – egyenlítőn mért – sugara, értéke 6 378 388 méter

Ebből a szögsebességre merőleges földfelszíni helyvektorvetület a $\rho_{0,2}(\lambda) \cdot \mathbf{j}$ vektorkomponens. Áttérve az $x'y'z'$ rendszerre írhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}_{\perp,0,x'y'z'}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\rho_{0,2}(\lambda) \cdot \sin(\lambda) \cdot \mathbf{i} \\ \rho_{0,2}(\lambda) \cdot \cos(\lambda) \cdot \mathbf{j} \\ 0 \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{eq} \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda) \cdot \mathbf{i} \\ R_{eq} \cdot \cos(\lambda)^2 \cdot \mathbf{j} \\ 0 \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (22.)$$

Az előző reprezentációja az xyz koordináta-rendszerben a pályapontokra, (ne feledjük $y \equiv y'$)

$$\mathbf{r}_{\perp,xyz}(\lambda, t) = \begin{bmatrix} -(R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda) \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathbf{i} \\ (R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda)^2 \cdot \mathbf{j} \\ -(R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\lambda) \cdot \sin(\alpha) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (23.)$$

másrészt röppályáink pontjai az aktuális földrajzi szélességet gyakorlatilag nem módosítják, ezért a pályapontokra végül írhatjuk, hogy

$$\mathbf{r}_{\perp,xyz}(t) = \begin{bmatrix} -(R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda_{túa}) \cdot \sin(\lambda_{túa}) \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathbf{i} \\ (R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda_{túa})^2 \cdot \mathbf{j} \\ -(R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda_{túa}) \cdot \sin(\lambda_{túa}) \cdot \sin(\alpha) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix}, \quad (24.)$$

ahol $\lambda_{túa}$ a tüzelőállás földrajzi szélessége.

A Föld saját tengelye körüli sziderikus⁴ keringési ideje

$$T_{Föld} \approx 24 [\text{óra}] \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) = 86\,163 [\text{s}], \quad (25.)$$

ebből a sziderikus szögsebesség abszolút értéke

$$|\omega_{Föld}| = \frac{2\pi}{T_{Föld}} \approx 7,29 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (26.)$$

A (7.) egyenlet most már kifejehetővé válik (24.) és (26.) felhasználásával

$$\mathbf{a}_{Föld,szall}(t) = \left(\frac{2\pi}{T_{Föld}} \right)^2 \cdot \begin{bmatrix} -(R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda_{túa}) \cdot \sin(\lambda_{túa}) \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathbf{i} \\ (R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda_{túa})^2 \cdot \mathbf{j} \\ -(R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda_{túa}) \cdot \sin(\lambda_{túa}) \cdot \sin(\alpha) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (27.)$$

Skaláregyenletei az alábbiak

$$\mathbf{a}_{F,sz,x}(t) = - \left(\frac{2\pi}{T_{Föld}} \right)^2 \cdot (R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda_{túa}) \cdot \sin(\lambda_{túa}) \cdot \cos(\alpha) \quad (28.)$$

$$\mathbf{a}_{F,sz,x}(t) = \left(\frac{2\pi}{T_{Föld}} \right)^2 \cdot (R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda_{túa})^2 \quad (29.)$$

$$\mathbf{a}_{F,sz,x}(t) = - \left(\frac{2\pi}{T_{Föld}} \right)^2 \cdot (R_{eq} + y(t)) \cdot \cos(\lambda_{túa}) \cdot \sin(\lambda_{túa}) \cdot \sin(\alpha) \quad (30.)$$

Látható, hogy ha a tüzérségi eszközök vonatkozásában is legfeljebb 30 kilométeres repülési magasságtól eltekintünk, akkor a szállító gyorsulás adott tüzelőállás esetén konstans vektornak tekinthető. (30 kilométeres repülési magasság esetén a relatív hiba mindössze 4,7%, de kézfegyverek esetében ez legfeljebb 0,4%.)

A MÁSODIK JÁRULÉKOS GYORSULÁS MEGHATÁROZÁSA

A Coriolis-gyorsulás vektor az xyz rendszerben tehát:

$$\mathbf{a}_{\text{cor,xyz}}(v(t)) = \begin{bmatrix} a_{\text{cor,x}}(v(t)) \cdot \mathbf{i} \\ a_{\text{cor,y}}(v(t)) \cdot \mathbf{j} \\ a_{\text{cor,z}}(v(t)) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (31.)$$

Felhasználva a (19.) felbontást és a (9.) definíciós egyenletet a Coriolis-gyorsulásra, adódik, hogy

$$\mathbf{a}_{\text{cor,xyz}}(v(t)) = 2 \cdot |\omega_{\text{Föld}}| \cdot \begin{bmatrix} v_x(t) \cdot \mathbf{i} \\ v_y(t) \cdot \mathbf{j} \\ v_z(t) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\lambda) \cdot \cos(\alpha) \cdot \mathbf{i} \\ \sin(\lambda) \cdot \mathbf{j} \\ \cos(\lambda) \cdot \sin(\alpha) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (32.)$$

$$\mathbf{a}_{\text{cor,xyz}}(v(t)) = 2 \cdot |\omega_{\text{Föld}}| \cdot \begin{bmatrix} (v_y(t) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\alpha) - v_z(t) \cdot \sin(\lambda)) \cdot \mathbf{i} \\ (v_z(t) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\alpha) - v_x(t) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\alpha)) \cdot \mathbf{j} \\ (v_x(t) \cdot \sin(\lambda) - v_y(t) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\alpha)) \cdot \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (33.)$$

Skaláregyenletei kifejtés nélkül:

$$a_{\text{cor,x}}(v(t)) = 2 \cdot (v_y(t) \cdot \omega_z - v_z(t) \cdot \omega_y) \quad (34.)$$

$$a_{\text{cor,y}}(v(t)) = 2 \cdot (v_z(t) \cdot \omega_x - v_x(t) \cdot \omega_z) \quad (35.)$$

$$a_{\text{cor,z}}(v(t)) = 2 \cdot (v_x(t) \cdot \omega_y - v_y(t) \cdot \omega_x) \quad (36.)$$

Kifejtve:

$$a_{\text{cor,x}}(v(t)) = 2 \cdot |\omega_{\text{Föld}}| \cdot (v_y(t) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\alpha) - v_z(t) \cdot \sin(\lambda)) \quad (37.)$$

$$a_{\text{cor,y}}(v(t)) = 2 \cdot |\omega_{\text{Föld}}| \cdot (v_z(t) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\alpha) - v_x(t) \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\alpha)) \quad (38.)$$

$$a_{\text{cor,z}}(v(t)) = 2 \cdot |\omega_{\text{Föld}}| \cdot (v_x(t) \cdot \sin(\lambda) - v_y(t) \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\alpha)) \quad (39.)$$

A (35.) egyenletet szemügyre véve látható, hogy ez a gyorsuláskomponens a gravitáció ellen, vagy mellett hat. Ez a komponens okozza az Eötvös-hatást, amely szerint a Föld egy adott szélességi körén mozgó test súlyereje a haladási sebességével arányosan változik, Keletre történő haladásnál a súlyerő csökken, Nyugatra pedig növekszik.

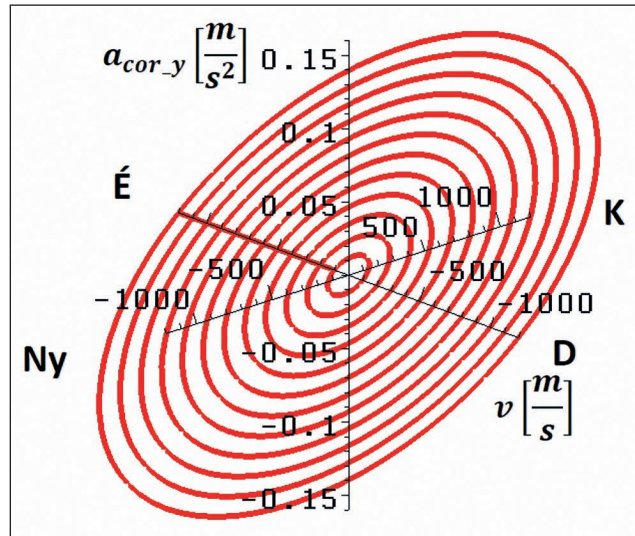
Kelet-Nyugat irányban vízszintesen mozgó testek esetében a (38.) egyenlet első tagja zérus értékű, mivel $v_z(t) = 0$, és ezekben az irányokban az azimutszög szinuszának abszolút értéke egységnyi. Az Eötvös-gyorsulás tehát Kelet-Nyugat irányban vízszintesen mozgó testekre, a koordináta-rendszerünkben előjelhelyesen:

$$a_{\text{Eötvös}}(v, \lambda) = 2 \cdot |\omega_{\text{Föld}}| \cdot v \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin(\alpha) \quad (40.)$$

(Az azimutérték $-\alpha$ - az északi tengelytől, $-x'$ - indul, és az óramutató járásával ellentétesen növekszik, É: 0° , Ny: 90° , D: 180° , K: 270° .)

Eötvös Loránd (1848–1919) ezt a jelenséget hajókon elvégzett gravitációs mérések adataiból következtette ki [5] [6], majd megismételt mérések adataiból igazolta is. [7]

Eötvös a hatás kimutatására 1915-ben egy különleges mérleget készített, amely felépítését, működését, mozgásegyenleteit a [8] forrás ismerteti.



5. ábra. Eötvös-gyorsulás a teljes azimut mentén, a 47. szélességi körön, 100, 200,...1200 m/s vízszintes mozgás esetén (Az ábra a szerző saját szerkesztése)

Az 5. ábrán az y irányú Eötvös-gyorsulás látható a teljes azimutra kiterjesztve.

A LÉGKÖRMODELL, A LÉGELLENÁLLÁSMODELL ÉS AZ EGYENLETEK

A légkörünk modellezésénél figyelembe kell vennünk, hogy a lövedékünk 65° -os löszög mellett elhagyja a troposzférát, tehát olyan modellt kell választanunk, amely a sztratoszférában is használható. Ehhez használhatjuk a GOSZT 4401-64-es, vagy az ISO 2533-as szabvány-specifikációt. (Ezek a szabványok a légsűrűséget adják meg számunkra a magasság függvényében.) A légellenállásra nézve számításainkhoz a szovjet 1943. évi légellenállási törvényt használtuk fel, ahol a lövedék légellenállás tényezőjét a repülési sebesség függvényében adják meg.

A külső ballisztika segédegyenletei az xyz rendszerben így a következők:

$$v(t) = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2} \quad (41.)$$

$$k_x(t) = \frac{v_x(t)}{v(t)}, \quad k_y(t) = \frac{v_y(t)}{v(t)}, \quad k_z(t) = \frac{v_z(t)}{v(t)} \quad (42.)$$

$$E(v(t)) = \rho(y(t)) \cdot \frac{\pi \cdot d_{\text{löv}}^2}{8 \cdot m_{\text{löv}}} \cdot i_{43} \cdot ce(v(t)) \cdot v(t)^2 \quad (43.)$$

Főegyenletei pedig:

$$\frac{d}{dt} v_x(t) = E(v(t)) \cdot k_x(t) + a_{\text{F,sz,x}}(t) + a_{\text{cor,x}}(v(t)) \quad (44.)$$

$$\frac{d}{dt} v_y(t) = E(v(t)) \cdot k_y(t) + g(\lambda) + a_{\text{F,sz,y}}(t) + a_{\text{cor,y}}(v(t)) \quad (45.)$$

$$\frac{d}{dt} v_z(t) = E(v(t)) \cdot k_z(t) + a_{\text{F,sz,z}}(x) + a_{\text{cor,z}}(v(t)) \quad (46.)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = v_x(t), \quad \frac{d}{dt} y(t) = v_y(t), \quad \frac{d}{dt} z(t) = v_z(t) \quad (47.)$$

ahol:

$x(t), y(t), z(t)$ az x, y és z irányú skalár útfüggvények,
 $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ az x, y és z irányú skalár sebességfüggvények,
 $v(t)$ a lövedék skalár sebességfüggvénye,



$k_x(t)$, $k_y(t)$, $k_z(t)$ az x , y és z irányú ellenálláserő multiplikátorfüggvények,
 $E(v(t))$ a légellenállási erő skalárfüggvénye,
 $\rho(y(t))$ a légkör sűrűségfüggvénye,
 $ce(v(t))$ az 1943. évi szabvány által meghatározott fajlagos légellenállás-függvény,
 $g(\lambda)$ a nehézségi gyorsulás előjeles skalárfüggvénye,
 i_{43} a lövedék légellenállási multiplikátora az 1943. évi törvény szabvány lövedékére vonatkozóan,
 $d_{löv}$, $m_{löv}$ a lövedék átmérője és tömege.

KEZDETI ÉRTÉKEK MEGHATÁROZÁSA, MEGOLDÁSI MÓDSZEREK

A külbálsztika főegyenleteinek megoldásához szükséges megadnunk a paraméterek értékeit, valamint a függvények értékeit zérus időpillanatban. Az $x(t=0)$, $y(t=0)$, $z(t=0)$, $v_x(t=0)$, $v_y(t=0)$, $v_z(t=0)$ függvényértékek számításaink során egységesen nulla értékűek, a $\rho(y(t=0))$ függvényérték kiszámításához szükséges tüzelőállási léghőmérsékletet 20°C -ra, a légnyomást pedig $101,3\text{ kPa}$ -ra állítottuk be. A nehézségi gyorsulás értékét az (11.) képletből számítjuk, előjele az xyz rendszerben negatív.

A löszöget φ -vel jelölve, a sebességkomponensekre (20.) alapján

$$v_x(t=0) = v_0 \cdot \cos(\varphi) \quad (48.)$$

$$v_y(t=0) = v_0 \cdot \sin(\varphi) \quad (49.)$$

A paraméterek és a kezdeti értékek megadásával egyenleteink megoldhatóvá válnak, a megoldáshoz negyedrendű Runge–Kutta numerikus módszert³ választottunk.

(Folytatjuk)

HIVATKOZOTT IRODALOM

- [1] Hauck, Günter, *Äußere Ballistik*, Militärverlag der DDR, Berlin, 1972
- [2] Carlucci, Donald E. and Sidney S Jacobson, *Ballistics: theory and design and ammunition* (CRC Press, 2018) pp. 275–281., <https://doi.org/10.1201/b22201> pp. 275–281.;
- [3] Györgyi Géza, *Elméleti Mechanika „A”*, jegyzet és vetített tematika az ELTE fizika BSc. másodéves hallgatói számára
- [4] Dr. Béda Gyula, Bezák Antal, *Mechanika I (kinematika, dinamika)*, Tankönyvkiadó, Budapest 1989, J 4-901

- [5] Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean, sowie in Rio de Janeiro, Lissabon, und Madrid. Von O. Hecker. Veröffentlichung des königlich preussischen geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 11, Folio. pp. 1–137, mit neun Tafeln, Berlin, 1903.;
- [6] Bestimmung der Schwerkraft auf dem Indischen und Grossen Ozean and an deren Küsten, sowie erdmagnetische Messungen. Von Prof. O. Hecker. Zentralbureau der internationalen Erdmessung. Neue folge der Veröffentlichungen. Nr. 16. Folio. pp. 1–233, mit zwölf Tafeln. Berlin, 1908.;
- [7] Bestimmung der Schwerkraft auf dem Schwarzen Meere und an dessen Küste, sowie neue Ausgleichung der Schwerkraft auf dem Atlantischen, Indischen und Grossen Ozean. Von Prof. O. Hecker. Zentralbureau der internationalen Erdmessung. Neue folge der Veröffentlichungen. Nr. 20. Folio. pp. 1–160, mit vier Tafeln. Berlin, 1910.;
- [8] Groma István, „Az Eötvös-mérleg” *Fizikai Szemle* 2019/12.;
- [9] Forrás: <https://unsplash.com/s/photos/north-star> (Letöltés: 2022.03.2.).

JEGYZETEK

- 1 Gaspard-Gustave, de Coriolis (Párizs, 1792. május 21. – Párizs, 1843. szeptember 19.) francia matematikus, mérnök, a mechanikai professzora, a Francia Tudományos Akadémia tagja. (A szerk.)
- 2 Feodosz Nyikolajevics, Kraszovszkij (oroszul: Феодосий Николаевич Красовский) (1878. szeptember 26. – 1948. október 1.) orosz, csillagász és geodéta, a Szovjetunió Tudományos Akadémia levelező tagja. 1940-ben meghatározta egy később róla elnevezett ellipszoid méreteit, amelyet az 1990-es évekig a geodéziában referencia-ellipszoidként használtak a Szovjetunióban és számos más országban. (A szerk.)
- 3 A Runge–Kutta-módszerek családja a differenciálegyenletek és egyenletrendszerek numerikus megoldásának széles körben ismert és alkalmazott közelítő eljárása, amelyet Carl Runge (1856–1927) és Martin Kutta (1867–1944) német matematikusok dolgoztak ki 1900 körül. (A szerk.)
- 4 A sziderikus, vagy csillagászati periódusidő eltér az általunk érzékelt 24 órás periódusidőtől, ugyanis a Föld Nap körüli mozgása befolyásolja az általunk észlelt egy nap hosszát. Mivel a két szögsebességvektor ellenirányú, ezért a Földnek teljes körülfordulása után még $\frac{1}{365} \cdot 24$ óra ideig kell forognia ahhoz, hogy „behozza lemaradását” a Nap állásához viszonyítva. Ekkor fog egy kijelölt pontja 24 óra elteltével a Naphoz viszonyítottan ismét a kezdeti állapotban állni. Tehát csak a látszólagos periódusidő hossza 24 óra, a csillagászati ennél $\frac{1}{365} \cdot 24$ órával kevesebb.

HADITECHNIKA FOLYÓIRAT

A *Haditechnika* folyóirat korábbi számai megvásárolhatók:

Líra Könyváruház, Récsei Center 1146 Bp., Istvánmezei út 6., (telefon: 411-1543);
 Stúdió könyvesbolt 1138 Bp., Népfürdő u. 15/D, (telefon/fax: 359-1964, 359-6461);

HM Zrínyi Nonprofit Kft. Ügyfélszolgálat (Budapest II., Fillér u. 14.)

Nyitvatartás: H.–P. 9–15 óra ugyfelszolgalat@hmzrinyi.hu.