

A gammakitörések térbeli eloszlása

A gammakitörések (GRB – *gamma-ray burst*) megfigyelése során tapasztalt lefedési függvény által okozott problémákat korábbi cikkünkben [1] tárgyaltuk. Ha feltételezzük, hogy az expozíciós függvény nem függ a távolságtól, összehasonlíthatjuk egyes alosztályok égi eloszlását egymással is. Amennyiben két kitörés különböző távolságban van és látszó fényességük azonos, akkor a műszerek egyenlő valószínűséggel fogják azt észlelni. Eltérő irány esetén – mint láttuk – lehet eltérés, hiszen a galaktikus síkban kevesebbet figyeltünk meg (lásd [1] 4. ábráját). Vegyük például a 100 legközelebbi gammakitörés és a 100 legtávolabbi kitörés eloszlását az égen. Ezek megfigyelési függvénye azonos. Így az expozíciós függvény konkrét ismerete nélkül is összehasonlíthatjuk az eloszlásokat. A 2012 júliusáig megfigyelt 283 gammakitörést feloszthatjuk több azonos darabszámú csoportra, és ezek összehasonlíthatók egymással. Ha két különböző távolságban lévő csoportot összehasonlítva az égi eloszlásukat hasonlónak találjuk, de egy harmadik csoport égi eloszlása mindkettőtől különbözik, akkor ennek a csoportnak megfelelő távolságban a GRB-k eloszlása nem homogén.

KÉTDIMENZIÓS ELOSZLÁSOK AZ ÉGGÖMBÖN

A fentiekől eltérő probléma a vizsgálatok során, hogy az eloszlások összehasonlítására általánosan használt Kolmogorov–Szmirnov próba [2] csak egy dimenzióban alkalmazható. Egy változó eloszlása esetén adódik egy olyan természetes rendezés, amely több változó esetén nem létezik. További probléma, hogy az égbolt topológiája nem egyezik meg az euklideszi sík topológiájával. Sík topológia esetére Peacock dolgozott ki egy eljárást [3], amelyet az alábbiakban ismertetünk.

Normál esetben a Kolmogorov–Szmirnov próbát úgy alkalmazzák, hogy a két eloszlásfüggvény maximális eltéréseinek értékét helyettesítik be a szignifikanciát adó képletbe. Kétdimenziós esetben Peacock azt javasolta, hogy az x, y síkon (x és y a két változó) vegyünk véges sok pontot. Ezek mindegyike négy részre osztja a síkot;

- 1, $x < x_0, y < y_0$
- 2, $x < x_0, y \geq y_0$

- 3, $x \geq x_0, y < y_0$
- 4, $x \geq x_0, y \geq y_0$,

itt (x_0, y_0) a választott pont két koordinátája.

A két kétdimenziós eloszlás darabszámait ezeken a tartományokon hasonlítják össze. Tanulmányunkban a két összehasonlítandó eloszlás elemszáma minden esetben megegyezik. Ha a két kétdimenziós ponthalmaz N elemet tartalmaz, akkor az egyes síknegyedekbe eső a_1, a_2, a_3, a_4 elemszámokat kell összehasonlítani a másik ponthalmaz b_1, b_2, b_3, b_4 értékeivel. Természetesen

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = N \quad \text{és} \quad b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = N.$$

A véges sok helyen vett $|a_i - b_i|$ kifejezések maximális értéke adja meg a két eloszlás maximális távolságát. Jelen témával foglalkozik még Lopes és társai munkája [4]. A Peacock-féle eljárás nagyobb elemszámok esetén jelentős számítógépidőt igényel. Fasano és Franceschini [5] az osztópontok megválasztására olyan algoritmust dolgozott ki, amellyel a „nyers erő” típusú számításokhoz képest a számítógépes futásidőt lényegesen csökkentették. A szakirodalomban a szignifikanciák megállapításához általában Monte-Carlo szimulációt javasolnak [6].

1. táblázat. A kétdimenziós Peacock-féle összehasonlító eljárás eredményei kilenc távolságcsoport esetén* (A szerző szerkesztése)

csoport	cs1	cs2	cs3	cs4	cs5	cs6	cs7	cs8	cs9
cs1		9	9	15	11	13	9	12	8
cs2			10	18	7	15	11	9	12
cs3				14	9	11	14	9	10
cs4					15	10	15	17	11
cs5						13	13	8	10
cs6							10	13	8
cs7								10	10
cs8									11

*A táblázat szimmetrikus, ezért csak a főátló feletti értékeket közöljük

ÖSSZEFOGLALÁS: A gammakitörések a világegyetem legnagyobb energiájú folyamatai közé tartoznak. Okozói a nagy tömegű csillagok végső összeomlása távoli galaxisokban. Így nagyon távoli tartományokban jelzik a világegyetem sűrűbb részeit. Segítségükkel alkalmunk nyílik világunk nagy léptékű szerkezetének felderítésére. Jelen tanulmányban két módszerrel is megvizsgáljuk a műholdak által megfigyelt kitörések térbeli eloszlását egy húszéves periódus alatt.

KULCSSZAVAK: kutató műholdak, gamma-műholdak, asztrofizika, statisztika, gammakitörések

ABSTRACT: Gamma-ray bursts (GRBs) are one of the most energetic explosions in the Universe. They are associated with the stellar endpoints and are found in distant galaxies. Therefore, they are indicators of the dense part of the Universe. Their spatial distribution of GRBs thus can help us expose the large scale structure of the Universe. In this article we use two standard methods for this analysis.

KEY WORDS: research satellites, gamma satellites, astrophysics, statistics, gamma-ray bursts

* DSc, NKE HHK Természettudományi Tanszék, tanszékvezető egyetemi tanár, horvath.istvan@uni-nke.hu ORCID: 0000-0002-1343-1761

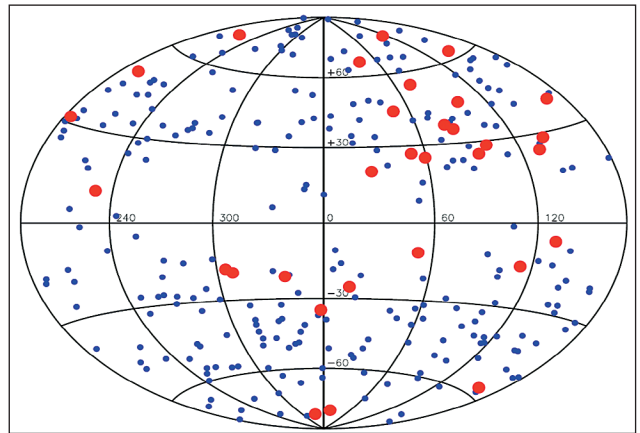


A fent ismertetett Peacock-féle kétdimenziós eljárás közvetlenül nem alkalmazható az említett 283 gammakitörés esetében. Ugyanis a gömb és a sík topológiája eltérő. Választhatjuk azonban az égen és a gömbi koordináta-rendszer, amelyben a fent leírt eljárás már alkalmazható. Négy távolságcsoporthoz például 70 gammakitörés kerül egy csoportba. Ezek égi eloszlását hasonlítottuk össze kilenc távolságcsoporthoz, azonban tíz, vagy még több különböző távolságcsoporthoz tartoztak (a 4 legkisebb vöröselölődésű gammakitörés volt statisztikai vizsgálatokhoz. A konkrét elemzést a kilenc távolságcsoporthoz történő felosztás esetén mutatjuk be. Mivel $31 \cdot 9 = 279$ ezért, hogy mind a kilenc csoport elemszáma 31 legyen, a legközelebbi négy kitörést kihagytuk a vizsgálatból. Így a vöröselölődés-osztópontok a következők lettek; $z = 0,41; 0,72; 0,93; 1,25; 1,60; 2,10; 2,73$ és $3,60$. Az első csoportba (cs1) a $z = 3,6$ -nál nagyobb vöröselölődésű kitörések kerültek. A második csoportba (cs2) a $z = 2,73$ és $z = 3,6$ közötti vöröselölődésű kitörések sorakoznak, és így tovább egészen a kilencedik csoportig, amelybe az $z = 0,41$ -nél kisebb vöröselölődésű gammakitörések tartoztak (a 4 legkisebb vöröselölődésű gammakitörés, tehát kimaradt).

A Peacock-féle eljárás eredményeit mutatja az 1. táblázat, amelyben a nagyobb szám nagyobb eltérést, nagyobb különbséget jelent a két csoport égi eloszlásában. Ezek a csoportok azok, amelyeknél a táblázatban a legnagyobb számok találhatóak. Például a nyolcadik csoport égi eloszlása (cs8) kevésbé tér el a hetedik csoportétól (cs7), mint a kilencedikétől (cs9). De az ötödik csoport égi eloszlásától még kevésbé tér el, hiszen a táblázatban lévő szám (8) kisebb, mint a másik két kiszámolt érték, a hetedik (10) és a kilencedik (11) csoporttal való összehasonlításhoz.

A nyolc legnagyobb számból hat, a hat legnagyobb számból pedig öt a negyedik csoporthoz (cs4) tartozik. Monte-Carlo módszerrel hozzávetőleges valószínűséget számoltunk véletlen eloszlások összehasonlításával. Megjegyzendő, hogy a jelenleg általánosan elfogadott kozmológiai modellek nagy skálán homogén és izotróp világot tételeznek fel. Ez alapján a most részletezett skálán nem lehetne megfigyelhető struktúra, azaz az égbolton a kitöréseket a távolságuktól függetlenül véletlenszerűnek kellene észlelnünk. Negyven ezer véletlen szimulációt végezve 31 pont helyzetét vettük az égen területarányos véletlen eloszlásban. Másik 31 véletlenszerű pozícióval összehasonlítva megkerestük a kétdimenziós összehasonlítás legnagyobb eltérését. Ezt az eljárást negyvenezerszer megismételve kaptunk egy statisztikát, amelyben 18-nál nagyobb értéket tíz esetben, 18-at huszonnyolc esetben kaptunk. Tehát körülbelül $\frac{10+28}{40\,000} = 0,00095$ az esély arra, hogy 17-nél nagyobb számot kapjunk. A Monte-Carlo módszerrel kapott eredmény 16-ra $p = 0,0029$, ugyanez 15-re $p = 0,0094$, továbbá annak a valószínűsége, hogy ez az érték 14-nél nagyobb legyen $p = 0,0246$ [7][8]. A 13-ra kapott érték, $p = 0,057$ már statisztikailag nem tekinthető szignifikánsnak.

Normális eloszlást feltételezve, kétszigmára¹ szignifikáns a 13-nál nagyobb, és három szigmára szignifikáns a 15-nél nagyobb érték. A táblázatban 36 szám található, amelyek egymástól nem függetlenek, hiszen összesen kilenc eloszlást hasonlítottunk össze páronként egymással. Ha függetlenek lennének, akkor várhatóan 1,6 esetben, azaz 1 vagy 2 esetben fordulna elő 13-nál nagyobb érték, illetve 15-nél nagyobb értéket nem is várnánk, hiszen arra a várható érték 0,09. Az 1. táblázat adataira ez akkor igaz, ha nem tekintjük a cs4 jelű csoportot. Ezen csoport nélkül két szám nagyobb 13-nál, és ezek egyike sem nagyobb 15-nél.



1. ábra. A gammakitörések égi elhelyezkedése. A kék pontok jelölik az ismert vöröselölődésű kitöréseket, a pirosak pedig az $1,6 < z < 2,1$ vöröselölődésű 31 gammakitörést [7]

A negyedik csoportnál azonban a nyolc érték közül hat szignifikáns eltérést mutat a többi csoporttól. Ezek közül kettő a három szigma szignifikanciát is meghaladja.

Amikor nyolc, hét, hat, öt vagy négy csoportra osztjuk a 283 kitörést, a távolságuk (vöröselölődésük) szerint rendezve, akkor attól függően tapasztalhatunk anizotrópiára utaló jelet, hogy a kilenc csoportra osztásnál rendellenesen viselkedő $z = 1,60-2,10$ tartomány mekkora része esett az egyes csoportokba. Ennek értelmében a következőkben ezen 31 pont elhelyezkedését vizsgáljuk az éggömbön. Az 1. ábra mutatja a negyedik csoport (cs4) égbolton látható eloszlását.

ELEMZÉSEK „LEGKÖZELEBBI TÁRS” MÓDSZERREL

Az egyik legelterjedtebb módszer struktúrák keresésére az éggömbön az ún. legközelebbi társ módszer [9,10]. Keresünk meg 31 adott pont esetében az egyes pontokhoz legközelebbi eső, de tőle különböző pont távolságát. Így 31 távolságadatot kapunk, amelyek eloszlását vizsgálhatjuk. Ha N pont véletlenszerűen oszlik el az égen, akkor a legközelebbi társ valószínűségi sűrűségfüggvénye:

$$P(\alpha) = \frac{(N-1)}{2^N} (\sin \alpha) (1 + \cos \alpha)^{N-2} \quad (1)$$

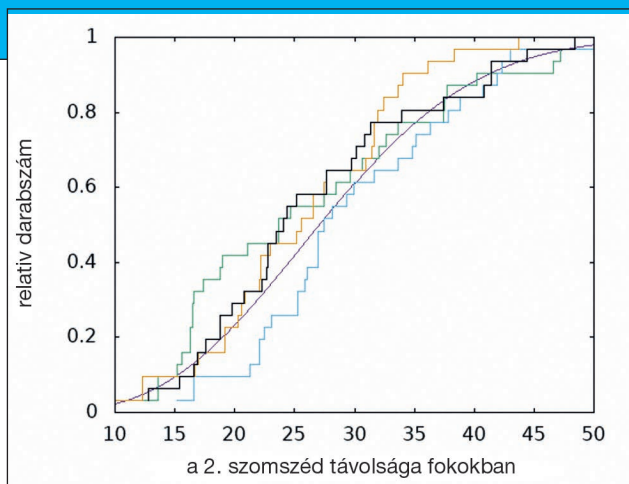
A második legközelebbi társ valószínűségi sűrűségfüggvénye:

$$P(\alpha) = \frac{(N-2)(N-1)}{2^{N-1}} (\sin \alpha) (1 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha)^{N-3} \quad (2)$$

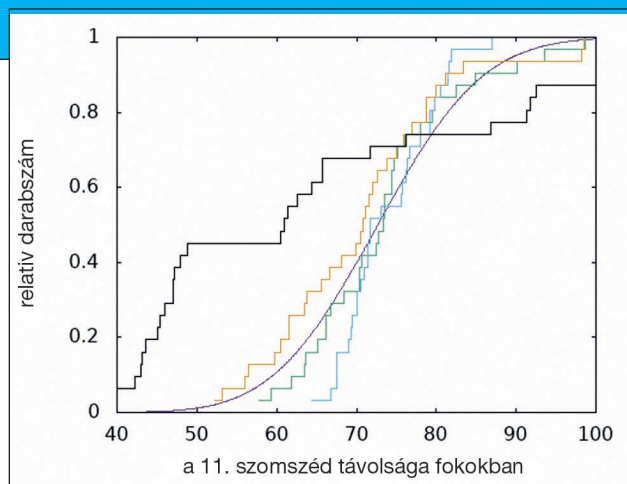
ahol α a két pont egymástól mért szögtávolsága a gömbön [9]. Ha N pont véletlenszerűen oszlik el az égen és az M -edik legközelebbi társ-eloszlását keressük, akkor Scott és Tout [9] szerint a valószínűségi sűrűségfüggvény:

$$P_M(\alpha) = \frac{(N-1)!}{2^{N-1} (N-M-1)! (M-1)!} \cdot (\sin \alpha) (1 - \cos \alpha)^{M-1} (1 + \cos \alpha)^{N-M-1} \quad (3)$$

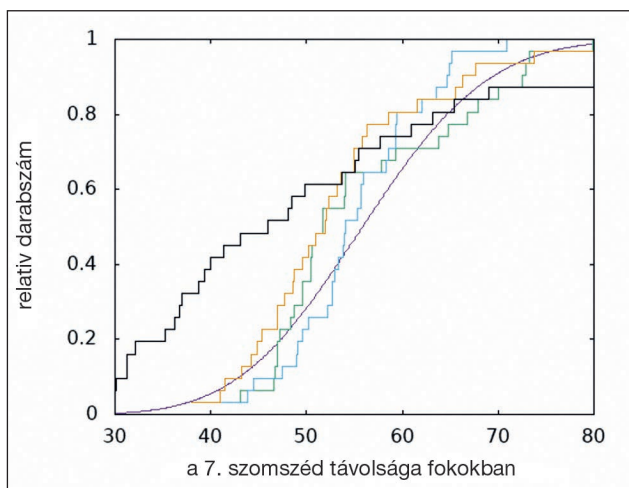
A következő ábrákon ezt az elméleti függvényt mindig bíbor színnel ábrázoltuk. Az előző fejezetben bevezetett csoportok (cs1,...,cs9) esetében mind a kilenc 31 elemű csoportnál megvizsgáltuk a legközelebbi társ, a második legközelebbi társ, végül a 30. legközelebbi társ-eloszlást. A 2. ábrán látható az első négy csoport esetén a második legközelebbi társ-eloszlás, az első csoportot zöld, a máso-



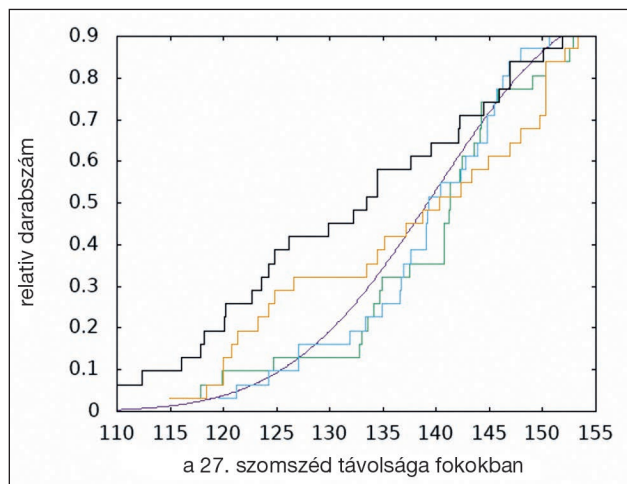
2. ábra. A 2. legközelebbitárs-eloszlásfüggvény az első (zöld), második (kék), harmadik (sárga) és negyedik (fekete) csoport esetén (A szerző szerkesztése)



4. ábra. A 11. legközelebbitárs-eloszlásfüggvény az első (zöld), második (kék), harmadik (sárga) és negyedik (fekete) csoport esetén. A bíbor színű görbe a véletlen eloszlás esetén várt eloszlásfüggvényt mutatja (A szerző szerkesztése)



3. ábra. A 7. legközelebbitárs-eloszlásfüggvény az első (zöld), második (kék), harmadik (sárga) és negyedik (fekete) csoport esetén. A bíbor színű görbe a véletlen eloszlás esetén várt eloszlásfüggvény (A szerző szerkesztése)



5. ábra. A 27. legközelebbitárs-eloszlásfüggvény az első (zöld), második (kék), harmadik (sárga) és negyedik (fekete) csoport esetén (A szerző szerkesztése)

dik csoportot kék, a harmadik csoportot sárga, a negyedik csoportot fekete színnel ábrázolva.

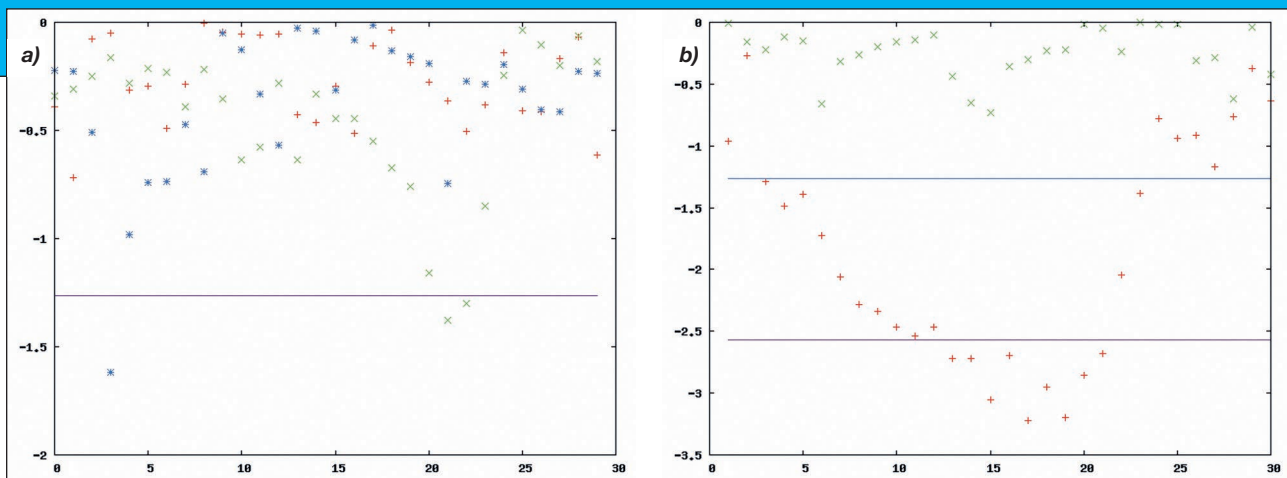
A 3. ábrán, hasonlóan a 2. ábrához az első négy csoport esetén a hetedik legközelebbitárs-eloszlásokat ábrázoltuk (az első csoportot zölddel, a második csoportot kékkel, a harmadik csoportot sárga, a negyedik csoport fekete színnel). A 4. ábrán látható a 11. legközelebbi szomszédok eloszlása, az 5. ábrán a 27. legközelebbi szomszédok eloszlása az első négy kitérőcsoport (távolság szerint osztályozva) esetén, hasonló színekkel ábrázolva, mint az előzőekben. Mindegyik csoport mutat ugyan eltérést a bíbor színű görbétől, de az ezekből az eltérésekből számított Kolmogorov–Szmirnov valószínűségek nyolc csoportnál egyáltalán nem szignifikánsak. Hasonló képet mutatnak az itt nem ábrázolt, de ugyancsak megvizsgált 5., 6., 7., 8. és 9. csoport legközelebbitárs-eloszlásai. A pontos valószínűségek a 6. ábrán láthatók.

Az a tény, hogy nyolc csoportnál (mindegyik egyenként 31 gammakitörést tartalmazott) a legközelebbitárs-eloszlás nem mutatott szignifikáns anizotrópiát, összhangban van azzal, hogy a gammakitörések nagyon távoliak, és ekkora skálán a világegyetem már homogén és izotróp. A 6. a) ábrán láthatók az első három csoport esetén az első 30 legközelebbiszomszéd-eloszlásokra kapott Kolmogorov–Szmirnov valószínűségek (a függőleges tengely logaritmus). Az első csoport esetén (piros szín) egyetlen egy sem érte el a 95%-os szignifikanciát (két szigma jel). Ugyan a

másik két csoportnál (kék és zöld szín) egy, illetve két esetben kaptunk $p = 0,05$ -nél (két szigma jel) kisebb értéket, de ez nem tekinthető szignifikánsnak, hiszen összesen 120 adatpont található az ábrán. Ezek természetesen nem teljesen független valószínűségek, de 120 tesztnél már véletlen eloszlás esetén is öt-hat kétszigmás jel várható.

A 6. b) ábrán láthatók a negyedik és az ötödik csoport esetén az első 30 legközelebbiszomszéd-eloszlásokra kapott Kolmogorov–Szmirnov valószínűségek (a függőleges tengely itt is logaritmus). Az ötödik csoport esetén sem találtunk szignifikáns valószínűségeket, szemben a negyedik csoport valószínűségeivel. Már a harmadik szomszédok eloszlása esetén két szigma az eltérés a negyedik csoportnál – piros pluszjelek a 6. ábra b) oldalán –, de láthatóan az első öt szomszédnál nincs különösebb tendencia. Ezután azonban egészen a 11. legközelebbi társig, a szignifikancia $(1 - p)$ folyamatosan nő egészen a három szigma szintig (99,7%), majd eléri, és többször meghaladja a 99,9%-os szignifikanciát. A 19. társától a szignifikancia rohamosan csökken. Mindezek azt mutatják, hogy nem kisszámú kitérés található egymáshoz közel, hanem legalább 11, de maximum 18 kitérés alkot egy csoportosulást az égen. A 18 már meg is haladja a teljes elemszám (31) felét. A 14 elemű csoport körülbelül a teljes égbolt nem egészen egynolcadán helyezkedik el, amely jelen esetben, 31 pont esetén $p = 0,0000055$ binomiális valószínűséget jelentene. Természetesen az itt számolt szignifikanciák csak hozzávetőlege-





6. ábra. A Kolmogorov–Smirnov próbából kapott valószínűségek a k -adik legközelebbi társak eloszlásfüggvényében a különböző csoportokra. Az a) ábrán a piros az első csoportot, zöld a második csoportot, kék a harmadik csoportot jelöli. A b) ábrán a piros a negyedik csoportot, a zöld az ötödik csoportot jelöli. Vízszintesen k , függőlegesen a valószínűség logaritmusára került feltüntetésre. A lila és kék vízszintes vonalak a két szigma és a három szigma értékeket jelölik (A szerző szerkesztése)

sek, a [11], [12] és [13] publikációk tovább vizsgálták az eloszlást például Monte-Carlo bootstrap elemzéssel.

Ezek a tanulmányok kimutatták, hogy nagyon valószínűtlen a gammakitörések ilyen térbeli csoportosulása. A felfedezett sűrűbb tartományt a médiában Hercules–Corona Borealis Nagy Fal néven emlegetik. Egy ekkora inhomogenitás erősen sérti a kozmológiai elvet, amely feltételezi, hogy nagyskálán a Világegyetemben egyenletesen oszlik el az anyag. A feltételezések szerint a legnagyobb struktúrák nem lehetnek lényegesen nagyobbak 150–200 megaparszeknél. Az eddig ismert legnagyobb struktúra, a Sloan Nagy Fal [14] mérete valamivel meghaladja az 1 milliárd fényévet, ami kb. 400 megaparszek, tehát feszegeti az elméleti határt. A cikkben tárgyalt elemzésekkel beazonosított nagy struktúra 5–6-szorosan meghaladja ezt a méretet [13].

A publikáció elkészültét támogatta az NKFIH Tématerületi Kiválósági Program 2021 pályázatán nyertes TKP2021-NVA-16 azonosítószámú NKE HHK pályázat „Alkalmazott katonai műszaki-, had-, és társadalomtudományi kutatások a nemzetvédelem, nemzetbiztonság területén a Hadtudományi és Honvédtisztképző Karon”.

HIVATKOZOTT IRODALOM

- [1] Horváth István. „A gammakitörések irány szerinti eloszlása” *Haditechnika* 55, 4. szám, (2021): pp. 43–46. <https://doi.org/10.23713/HT.55.4.08>;
- [2] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T.: *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge. (1992);
- [3] Peacock, J. A. „Two-dimensional goodness-of-fit testing in astronomy”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 202, sz. 1. (1983): pp. 615–627. <https://doi.org/10.1093/mnras/202.3.615>;
- [4] Lopes, R. H. C., Hobson P. R. and Reid I. D. „Computationally efficient algorithms for the two-dimensional Kolmogorov Smirnov test”. *Journal of Physics*, 119, sz. 4, article id. 042019, (2008) <http://doi.org/10.1088/1742-6596/119/4/042019>;
- [5] Fasano, G. and Franceschini, A. „A multidimensional version of the Kolmogorov–Smirnov test”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 225 sz. 1. (1987): pp. 155–170. <https://doi.org/10.1093/mnras/225.1.155>;
- [6] Justel, A., Pena, D. and Zamar, R. „A multivariate Kolmogorov–Smirnov test of good-ness of fit”. *Statistics and Probability Letters*, 35, sz. 3. (1997): pp. 251–259. [https://doi.org/10.1016/S0167-7152\(97\)00020-5](https://doi.org/10.1016/S0167-7152(97)00020-5);
- [7] Horvath, I., Hakkila, J., Bagoly, Z. „The largest structure of the Universe, defined by Gamma-Ray Bursts”. In: N, Gehrels, M S, Briggs, V, Connaughton (szerk.) *7th Huntsville Gamma-Ray Burst Symposium*, Melville (NY), USA: AIP Publishing (2013) Paper: 33, 6 p.;
- [8] Horváth, I., Hakkila, J. and Bagoly, Z. „Possible structure in the GRB sky distribution at redshift two”. *Astronomy and Astrophysics*, 561, id. L12 (2014). <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201323020>;
- [9] Scott, D. and Tout, C. A. „Nearest neighbour analysis of random distributions on a sphere”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 241, sz. 2. (1989) pp. 109–117. <https://doi.org/10.1093/mnras/241.2.109>;
- [10] Slechta, M. and Mészáros, A. „A Note on the Nearest Neighbour Analysis”. *Astrophysics and Space Science*, 249, sz. 1, (1997): pp. 1–5.;
- [11] Horváth I., Bagoly Z., Hakkila J., Tóth L.V. „New data support the existence of the Hercules–Corona Borealis Great Wall”. *Astronomy and Astrophysics*, 584, id. A48 (2015): pp. 8. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424829>;
- [12] Rácz, I., Balázs L.G., Horváth I., Tóth L.V., Bagoly Zs. „Statistical properties of Fermi GBM GRBs’ spectra”. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475 sz. 1. (2018): pp. 306–320. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx3152>;
- [13] Horvath, I et al. „The clustering of gamma-ray bursts in the Hercules–Corona Borealis Great Wall: the largest structure in the Universe?” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 498, sz. 2. (2020): pp. 2544–2553. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa2460>;
- [14] Gott, J. R., III, Juric, M., Schlegel, D., Hoyle, F., Vogeley, M., Tegmark, M., Bahcall, N. and Brinkmann, J. „A Map of the Universe.” *The Astrophysical Journal*, 624, sz. 2. (2005): pp. 463–484. <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/428890>.

JEGYZETEK

1 A szigma (σ) a görög ábécé karaktere, amelyet a statisztikusok a folyamatokban előforduló ingadozás kifejezésére használnak.